

No.2 核と像

この回のゴール

- 線形写像の核 $\text{Ker } f$ と像 $\text{Im } f$ を定義し、それらが部分空間であることを示せる.
- 「 f が単射 $\iff \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ 」を説明できる.
- 行列が定める線形写像 f_A について、核と像の基底を求められる.
- 多項式や行列の空間の線形写像について、核と像を求められる.

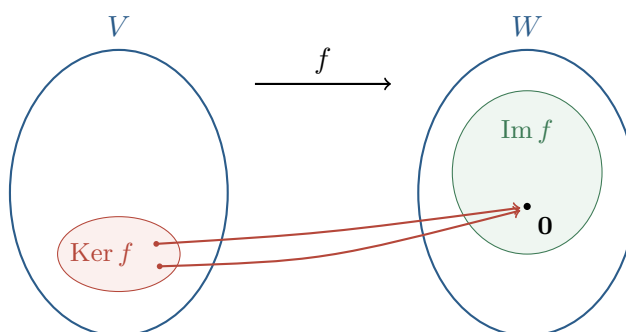
以下, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

1. 核と像

定義 1 核と像

$$\text{Ker } f = \{x \in V \mid f(x) = \mathbf{0}\}, \quad \text{Im } f = \{f(x) \mid x \in V\}$$

をそれぞれ f の核 (カーネル), 像 (イメージ) という. $\text{Ker } f$ は「 $\mathbf{0}$ に移るもの全体」で V の部分集合, $\text{Im } f$ は「 f で移った先全体」で W の部分集合である.



定理 1

$\text{Ker } f$ は V の部分空間, $\text{Im } f$ は W の部分空間である.

【証明】 $\text{Ker } f: f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in \text{Ker } f$. $f(a) = f(b) = \mathbf{0}$ なら $f(a+b) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $f(ca) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
 $\text{Im } f: \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in \text{Im } f$. $f(a) + f(b) = f(a+b)$, $cf(a) = f(ca)$ はどちらも $\text{Im } f$ に入る. $\square$

■ 2. 単射・全射との関係

定義 2 単射・全射

- $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ が成り立つとき, f は**単射**であるという。(違うものは違うところへ移る.)
- $\text{Im } f = W$ のとき, f は**全射**であるという。(W のすべてが行き先になっている.)
- 単射かつ全射のとき, **全単射**という.

定理 2 単射の判定

$$f \text{ が単射} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

【証明】 $(\Rightarrow) x \in \text{Ker } f$ なら $f(x) = 0 = f(0)$. 単射なので $x = 0$.

$(\Leftarrow) f(a) = f(b)$ とすると $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$ なので $a - b \in \text{Ker } f = \{0\}$. よって $a = b$. $\square$

注意

一般の写像では, 単射かどうかを確かめるのにすべての a, b を調べる必要がある. 線形写像なら, 0 に移るものが 0 だけかを見るだけで済む.

定理 3 像は生成系の行き先で生成される

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ ならば, } \text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

【証明】 $x = \sum x_i v_i$ なら $f(x) = \sum x_i f(v_i)$. よって $\text{Im } f$ の要素はすべて $f(v_i)$ の 1 次結合で, 逆に $f(v_i)$ の 1 次結合 $\sum x_i f(v_i) = f(\sum x_i v_i)$ は $\text{Im } f$ に入る. $\square$

■ 3. 行列が定める線形写像の核と像

$A = (a_1 \cdots a_n)$ を $m \times n$ 行列とし, $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$ とする.

定理 4

- (1) $\text{Ker } f_A$ は同次方程式 $Ax = 0$ の解空間である.
- (2) $\text{Im } f_A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ (A の列ベクトルで生成される部分空間).

【証明】 (1) 定義そのもの. (2) $f_A(e_j) = Ae_j = a_j$ なので, 定理 3 で $v_j = e_j$ とすればよい. $\square$

注意

$\text{Im } f_A$ を A の列空間ともいう。「 $\mathbf{b} \in \text{Im } f_A$ 」は「 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつ」と同じ意味である。第 2 章で学んだ連立方程式の理論は、核と像の言葉で言いかえられる：

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつ $\iff \mathbf{b} \in \text{Im } f_A$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつとき、その解がただ 1 つ $\iff \text{Ker } f_A = \{\mathbf{0}\}$ (f_A が単射).
- 一般解 = 特殊解 + $\text{Ker } f_A$ の要素.

まとめると、存在と一意性は別々の条件で決まる：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ がただ 1 つの解をもつ} \iff \mathbf{b} \in \text{Im } f_A \text{ かつ } \text{Ker } f_A = \{\mathbf{0}\}.$$

たとえば $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ では $\text{Ker } f_A = \{\mathbf{0}\}$ だが, $\mathbf{b} \notin \text{Im } f_A$ なので解は存在しない. 核が $\{\mathbf{0}\}$ であることは「解があれば 1 つ」を保証するだけで、解の存在までは保証しない.

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について、 $\text{Ker } f_A$ と $\text{Im } f_A$ の基底と次元を求めよ.

【解答】 簡約階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (第 1 章 No.4 例題 1).

$\text{Ker } f_A: A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間で、第 4 章 No.4 例題 1 より基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim \text{Ker } f_A = 2$.

$\text{Im } f_A$: 列ベクトルで生成される部分空間で、第 4 章 No.4 例題 2 より、主成分のある第 1 列・第 3 列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が基底. $\dim \text{Im } f_A = 2$.

注意

- $\text{Ker } f_A$ は定義域 $\mathbb{R}^4$ の部分空間, $\text{Im } f_A$ は値域側 $\mathbb{R}^3$ の部分空間. 基底のベクトルの成分の個数が違うことを確認しよう.
- 例題 1 で $\dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ となっている. これは偶然ではない (No.3 次元定理).

■ 4. いろいろな線形写像の核と像

例題 2

微分 $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$, $D(f) = f'$ の核と像を求めよ.

【解答】 $\text{Ker } D: f' = 0$ となるのは定数関数. $\text{Ker } D = \mathbb{R}[x]_0 = \langle 1 \rangle$, 次元 1.

$\text{Im } D$: 定理 3 より $\text{Im } D = \langle D(1), D(x), D(x^2), D(x^3) \rangle = \langle 0, 1, 2x, 3x^2 \rangle = \mathbb{R}[x]_2$, 次元 3. D は単射でも全射でもない.

例題 3

$T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(f) = {}^t(f(0), f(1), f(2))$ は全単射であることを示せ.

【解答】 単射: $f \in \text{Ker } T$ なら $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. 2 次以下の多項式で異なる 3 つの根をもつのは 0 だけなので $f = 0$. $\text{Ker } T = \{0\}$ で, 定理 2 より単射.

全射: 定理 3 より $\text{Im } T = \langle T(1), T(x), T(x^2) \rangle = \langle {}^t(1, 1, 1), {}^t(0, 1, 2), {}^t(0, 1, 4) \rangle$. 3 本を並べた行列の

行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ なので, この 3 本は $\mathbb{R}^3$ の基底. よって $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$.

コラム: 例題 3 の意味

T が全単射であることは, 「どんな 3 つの値 y_0, y_1, y_2 に対しても, $f(0) = y_0, f(1) = y_1, f(2) = y_2$ を満たす 2 次以下の多項式 f がちょうど 1 つある」ことを意味する. これはラグランジュ補間の基礎で, 第 3 章 No.3 で見たヴァンデルモンドの行列式とも結びついている.

■ 練習問題

1. 次の行列 A が定める線形写像 f_A について, $\text{Ker } f_A$ と $\text{Im } f_A$ の基底と次元を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ が定める $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は単射か. 全射か.

3. トレース $\text{tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ の核と像を求めよ.

4. $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $T(X) = X - {}^tX$ の核と像の基底と次元を求めよ.

5. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ が単射で, $v_1, \dots, v_k$ が 1 次独立ならば, $f(v_1), \dots, f(v_k)$ も 1 次独立であることを示せ.

6. (考えてみよう) 線形写像 $f: V \rightarrow V$ が $f \circ f = f$ を満たすとする (このような f を射影という).

(1) $y \in \text{Im } f$ ならば $f(y) = y$ であることを示せ.

(2) $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ を示せ.

■ 練習問題の解答

1. (1) 簡約階段行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Ker } f_A : x_1 = x_3, x_2 = -2x_3$ より基底 ${}^t(1, -2, 1)$, 次元 1.
 $\text{Im } f_A$: 第 1・2 列 ${}^t(1, 4, 7), {}^t(2, 5, 8)$ が基底, 次元 2.
- (2) 簡約すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Ker } f_A$: 基底 ${}^t(-1, 1, 1)$, 次元 1. $\text{Im } f_A$: 第 1・2 列 ${}^t(1, 2, 1), {}^t(-1, 1, 2)$ が基底, 次元 2.
2. $\text{rank } A = 2$ なので $Ax = 0$ の解は 0 だけで, $\text{Ker } f_A = \{0\}$. 単射である. $\text{Im } f_A$ は 2 本の列で生成され, 次元は $2 < 3$ なので $\mathbb{R}^3$ にならない. 全射でない.
3. $\text{Ker}(\text{tr}) = \{A \mid \text{tr } A = 0\}$ で, 第 4 章 No.4 練習問題 4 より次元 3, 基底 $E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}$.
 $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$ (たとえば $\text{tr}(cE_{11}) = c$ でどんな実数も行き先になる).
4. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $T(X) = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Ker } T : b = c$, つまり対称行列全体. 基底 $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}$, 次元 3. $\text{Im } T : \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} (t = b-c)$ 全体. 基底 $E_{12} - E_{21}$, 次元 1. ($3+1=4 = \dim M_{2,2}(\mathbb{R})$ となっている.)
5. $c_1 f(v_1) + \cdots + c_k f(v_k) = 0$ とすると $f(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = 0$. $\text{Ker } f = \{0\}$ なので $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0$. 1 次独立性より $c_1 = \cdots = c_k = 0$.
6. (1) $y = f(x)$ と書けるので $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. (2) $y \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ なら, (1) より $y = f(y) = 0$.